$C^0(\Omega;\mathbb{R}^n) = \{F : \Omega \to \mathbb{R}^n, F(x) = (F_1(x),\dots,F_n(x)) | F_i \in C^0(\Omega)\}$

1 Opérateurs différentiels

Gradient : $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \Omega \to \mathbb{R}^n)$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Laplacien : $(\Omega\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}:\Omega\to\mathbb{R})$

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(x)$$

Divergence : $(\Omega\subseteq \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n:\Omega\to\mathbb{R})$

$$\mathrm{div}F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$$

Rotationnel :
$(\Omega\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:\Omega\to\mathbb{R})$

$$\mathrm{rot}F(x) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x)$$

$(\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:\Omega\to\mathbb{R}^3)$

$$\mathrm{rot}F(x) = (\mathrm{rot}F_{23},\mathrm{rot}F_{31},\mathrm{rot}F_{12})$$

1.1 Propriétés

$\Omega\subseteq\mathbb{R}^n, f\in C^2(\Omega), F\in C^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$

$\mathrm{div}(\nabla f) = \Delta f$
$\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$
$\mathrm{div}(\mathrm{rot}_{n=3}F) = 0$
$\mathrm{div}(f\cdot F) = f\cdot \mathrm{div}F + \nabla f\cdot F$

2 Intégrales curvilignes

2.1 Courbes

Courbe régulière : sous-ensemble $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ tel que ∃ une paramétrisation $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n, t\mapsto\gamma(t) = (\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))$ où :
$\gamma([a,b]) = \Gamma = \{x\in\mathbb{R}^n | \exists t\in[a,b], \gamma(t)=x\}$
$\gamma\in C^0([a,b];\mathbb{R}^n)\cup C^1(]a,b[;\mathbb{R}^n)$
$\|\gamma'(t)\|\neq 0, \forall t\in[a,b]$

Courbe régulière simple : $\exists\gamma:[a,b]\to\Gamma$ où :
$\forall s,t\in[a,b], \gamma(s)=\gamma(t) \implies$
$s=t$ ou $\begin{cases} s=a,t=b\\ s=b,t=a\end{cases}$

Courbe fermée : $\exists\gamma:[a,b]\to\Gamma \,|\, \gamma(a)=\gamma(b)$

Courbe régulière par morceaux :
$\Gamma = \Gamma_1\cup\dots\cup\Gamma_k$ où Γ_i est une courbe régulière et Γ est continue

$\tilde\gamma : [a,b]\to -\Gamma, t\mapsto \gamma(-t+a+b)$ (Γ parcouru dans l'autre sens) $\tilde\gamma' = -\gamma'$

2.2 Intégrales

$\Omega\in\mathbb{R}^n$ ouvert, $\Gamma\subset\Omega$ régulière, $\gamma:[a,b]\to\Gamma$

Pour $f\in C^0(\Omega)$:
$\int_\Gamma f\,dl = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\|\gamma'(t)\|\,dt$

Pour $F\in C^0(\Omega;\mathbb{R}^n)$:
$\int_\Gamma F\cdot dl = \int_a^b F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$

Pour Γ régulière par morceaux :
$\int_\Gamma f\,dl = \sum_{i=1}^k\int_{\Gamma_i} f\,dl$
$\int_\Gamma F\cdot dl = \sum_{i=1}^k\int_{\Gamma_i}F\cdot dl$

$\|\gamma'(t)\| = 1 \implies \int_\Gamma f\,dl = \int_a^b f(\gamma(t))\,dt$
$\int_\Gamma f\,dl$ ne dépend pas du choix de γ
$\int_\Gamma F\cdot dl$ ne dépend pas (±) du choix de γ
Longueur de Γ : $\int_\Gamma 1\,dl = \int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt$

3 Champs dérivés de potentiel

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ouvert, $F\in C^0(\Omega;\mathbb{R}^n)$ dérive du potentiel $f\in C^1(\Omega)$ si $F=\nabla f$
(f : primitive de F)
F dérive du potentiel f et Γ régulière $\implies$
$\int_\Gamma F\cdot dl = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

Domaine étoilé : $\exists x_0\in\Omega$ (centre) tel que $\forall x\in\Omega$, (segment) $[x_0,x]\subset\Omega$
Étoilé $\implies$ simplement connexe
$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ouvert, $F\in C^0(\Omega;\mathbb{R}^n)$
F dérive d'un potentiel $\implies \mathrm{rot}F=0$ pour $n=2,3$, sinon $\forall i,j: \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$
Ω étoilé $\implies$ la réciproque est vraie
F dérive d'un potentiel $\iff \int_\Gamma F\cdot dl = 0, \forall\Gamma$ rpmsf $\in\Omega \iff \int_{\Gamma_1}F\cdot dl = \int_{\Gamma_2}F\cdot dl, \forall\Gamma_1,\Gamma_2$ rpms avec mêmes extrémités

4 Théorème de Green

$\overline\Omega = \Omega\cup\partial\Omega$
$\Omega = \Omega_0\setminus\bigcup_{i=1}^k\Omega_i$ régulier : $\overline\Omega_i\subseteq\Omega_0$, $\overline\Omega_i\cup\overline\Omega_j = \emptyset, \partial\Omega_i$ rpmsf $(1\le j<k)$
Orienté positivement : paramétrisation laisse le domaine Ω à gauche.
$\Omega\subset\mathbb{R}^2$ régulier, $\partial\Omega$ orienté positivement, $F\in C^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$:
$\iint_\Omega \mathrm{rot}F(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega}F\cdot dl$
Formule de l'aire : $\mathrm{Aire}(\Omega) = \int_{\partial\Omega}(0,x)\cdot dl = \int_{\partial\Omega}(-y,0)\cdot dl$

5 Théorème divergence

Normale extérieure $\vec\nu_P$ où $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ régulier, $\gamma(t_0) = P\in\partial\Omega : \|\vec\nu_P\| = 1$, $\gamma'(t_0)\cdot\vec\nu_P = 0, \forall\varepsilon>0: P+\varepsilon\vec\nu_P\notin\Omega$
$\iint_\Omega \mathrm{div}F\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega}(F\cdot\vec\nu)\,dl$
Pour γ régulier et $\partial\Omega$ orienté positivement :
$\vec\nu_{\gamma(t)} = \frac{(\gamma_2'(t),-\gamma_1'(t))}{\|\gamma'(t)\|}$
$\int_{\partial\Omega}F\cdot\vec\nu\,dl = \int_a^b F(\gamma(t))\cdot(\gamma_2'(t),-\gamma_1'(t))dt$

6 Surfaces

6.1 Représentations

Cartésienne : $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=f(x,y)\}$
Implicite : $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, S=\{(x,y,z) : f(x,y,z)=0\}$
Paramétrique : Si $\sigma:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $S = \mathrm{Im}(\sigma) = \sigma(\Omega)$

6.2 Intégrale

Surface régulière : $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ telle que $\exists\Omega\subset\mathbb{R}^2$ ouvert borné où $\partial\Omega$ srpm et $\sigma\in C^1(\overline\Omega;\mathbb{R}^3) : \overline\Omega\to\mathbb{R}^3$ injective sur Ω et telle que $\sigma(\overline\Omega) = \Sigma$, et $\sigma:\overline\Omega\to\mathbb{R}^3\ (u,v)\mapsto\sigma(u,v)$ on a $\forall(u,v)\in\Omega\ \|\sigma_u\times\sigma_v\|\neq 0$ où
$\sigma_u = \frac{\partial\sigma}{\partial u}, \sigma_v = \frac{\partial\sigma}{\partial v}$
Régulière par morceaux : $\Sigma = \Sigma_1\cup\dots\cup\Sigma_k$ telles que Σ est connexe, Σ_i régulières et ne se "touchent qu'au bord"

Vecteurs normaux unitaires : $\pm\frac{\sigma_u\times\sigma_v}{\|\sigma_u\times\sigma_v\|}$

Intégrale de surface : $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ ouvert contenant Σ régulière, $f\in C^0(\Omega), F\in C^0(\Omega;\mathbb{R}^3)$, $A\subset\mathbb{R}^2$ ouvert, $\sigma:\overline A\to\Sigma\ (u,v)\mapsto\sigma(u,v)$ une paramétrisation régulière :
$\iint_\Sigma f\,ds = \iint_A f(\sigma(u,v))\cdot\|\sigma_u\times\sigma_v\|\,du\,dv$
$\iint_\Sigma F\cdot ds = \iint_A F(\sigma(u,v))\cdot(\sigma_u\times\sigma_v)du\,dv$
$\iint_\Sigma f\,ds$ ne dépend pas du choix de σ
$\iint_\Sigma F\cdot ds$ ne dépend pas (±) du choix de σ

Flux : $\nu:\Sigma\to\mathbb{R}^3$ champs de normales unités de Σ, $\iint_\Sigma(F\cdot\nu)\,ds = \pm\iint_\Sigma F\cdot ds$ = flux de f à travers Σ
Aire : $\mathrm{Aire}(\Sigma) = \iint_\Sigma 1\,ds$

Théorème divergence $\mathbb{R}^3$: $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ régulier, $F\in C^1(\overline\Omega;\mathbb{R}^3)$, ν champ de normales extérieures à Ω : $\iiint_\Omega \mathrm{div}F\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega}(F\cdot\nu)\,ds$

7 Théorème de Stokes

$\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ surface rpmo, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ contenant Σ, $F\in C^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$
$\iint_\Sigma\mathrm{rot}F\cdot ds = \int_{\partial\Sigma}F\cdot dl$
$\partial\Sigma=\emptyset\implies\iint_\Sigma\mathrm{rot}F\cdot ds = 0\,\forall F$

8 Fourier

T-Périodique : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, si $f(x+T) = f(x)\,\forall x\in\mathbb{R}$
$\implies\int_0^T f(x)\,dx = \int_h^{T+h}f(x)\,dx$
Espace vectoriel de Fourier :
$V = \{f = g+ih\,|\,g,h\in C^1_{\text{morc}}([0,T]) : \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ T\text{-périodiques}\}$
$\langle f_1,f_2\rangle = \frac1T\int_0^T f_1(x)\cdot f_2(x)\,dx$
Base orthonormée : $e^{i\frac{2\pi}{T}nx} = \cos(\frac{2\pi}{T}nx) + i\sin(\frac{2\pi}{T}nx),\quad n\in\mathbb{Z}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ T-périodique $C^1_{\text{morc}}([0,T])$
$F_N^{\mathbb{R}}f(x) = F_N^{\mathbb{C}}f(x) = F_Nf(x)$
$F^{\mathbb{R}}f(x) = F^{\mathbb{C}}f(x) = Ff(x)$

Théorème Dirichlet :
$F^{\mathbb{C}}f(x) = \lim_{h\to0}\frac{f(x-h)+f(x+h)}{2}$
f continue en x : $F^{\mathbb{C}}f(x) = f(x)$

Identité Parseval : $\frac1T\int_0^T f^2(x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 = \frac12\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)\right)$

8.1 Coefficients complexes

$F_N^{\mathbb{C}}f(x) = \sum_{n=-N}^N c_ne^{i\frac{2\pi}{T}nx}$
$F^{\mathbb{C}}f(x) = \lim_{N\to+\infty}F_N^{\mathbb{C}}f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{i\frac{2\pi}{T}nx}$

8.2 Coefficients réels

$a_n = \frac2T\int_0^T f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx,\quad(n\ge0)$
$a_n = c_n + c_{-n}$
$b_n = \frac2T\int_0^T f(x)\sin(\frac{2\pi}{T}nx)\,dx,\quad(n\ge1)$
$b_n = i(c_n - c_{-n})$
$F_N^{\mathbb{R}}f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N\left(a_n\cos(\frac{2\pi}{T}nx)+b_n\sin(\frac{2\pi}{T}nx)\right)$
$F^{\mathbb{R}}f(x) = \lim_{N\to\infty}F_N^{\mathbb{R}}f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty\left(a_n\cos(\frac{2\pi}{T}nx)+b_n\sin(\frac{2\pi}{T}nx)\right)$
f paire : $b_n=0$, f impaire : $a_n = 0$

8.3 Série de Fourier

$f\in C^1_{\text{morc}}([0,L])$
$\widetilde{a_n} = \frac2L\int_0^L f(x)\cos(\frac{\pi}{L}nx)\,dx$
$\widetilde{b_n} = \frac2L\int_0^L f(x)\sin(\frac\pi L nx)\,dx$
En cosinus : $F_cf(x) = \frac{\widetilde{a_0}}{2} + \sum_{n=1}^\infty\widetilde{a_n}\cos(\frac\pi L nx)$
En sinus : $F_sf(x) = \sum_{n=1}^\infty\widetilde{b_n}\sin(\frac\pi L nx)$
f continue $\implies F_cf(x) = F_sf(x) = f(x)$
$F_cf(0) = f(0), F_cf(L) = f(L), F_sf(0) = 0 = F_sf(L)$

8.4 Application EDO

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue, T-periodique, f' existe (sauf en nb finis pts $\in[0,T]$), $f\in C^1_{\text{morc}}([0,T])$
$Ff'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ni\frac{2\pi}{T}ne^{i\frac{2\pi}{T}nx}$
$Ff'(x) = \sum_{n=1}^\infty\left(\frac{2\pi}{T}b_n\cos(\frac{2\pi}{T}nx) - \frac{2\pi}{T}a_n\sin(\frac{2\pi}{T}nx)\right)$
$c_n' = i\frac{2\pi}{T}nc_n, a_n' = \frac{2\pi}{T}nb_n, b_n' = -\frac{2\pi}{T}na_n$
calcul les coeffs de f à partir de ceux de f'
$f'-f = h \iff Ff'-Ff = Fh$
$\forall n\ c_n(in-1) = \hat{c_n}, c_n = \frac{\hat{c_n}}{in-1}$
$a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n-c_{-n}) = -\frac{\hat{b_n}-n\hat{a_n}}{n^2+1}$
$\hat{a_n},\hat{b_n}$ coeffs réels de $h(x)$

9 Transformée de Fourier

$V=\mathbb{R}^n, v\in V\implies v = \sum_{j=1}^n\langle v,e_j\rangle e_j$
Transformée de Fourier complexe : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/\mathbb{C}, \int_{-\infty}^\infty|f(x)|\,dx<+\infty; \mathcal{F}f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, \alpha\mapsto\mathcal{F}f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\alpha x}\,dx$
Transformée de Fourier inverse : $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, \alpha\mapsto g(\alpha)$ telle que $\int_{-\infty}^\infty|g(\alpha)|\,d\alpha<+\infty; \mathcal{F}^{-1}g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, x\mapsto\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty g(\alpha)e^{i\alpha x}\,d\alpha$
Formule d'inversion : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, \hat f(\alpha) = \mathcal{F}f(\alpha)$ telle que $\int_{-\infty}^\infty|f(x)|\,dx<+\infty, \int_{-\infty}^\infty|\hat f(x)|\,dx<+\infty$;
$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x)$
$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\hat f))(\alpha) = \hat f(\alpha)$

$\hat f = \mathcal{F}(f)$

Produit de convolution : $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \int|f|,|g|<+\infty; f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ x\mapsto f*g(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x-t)g(t)\,dt$

9.1 Propriétés

$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, \int_{-\infty}^\infty|f(x)|\,dx<+\infty, \int_{-\infty}^\infty|g(x)|\,dx<+\infty$

Continuité : $\mathcal{F}f(x)$ est continue en α
Linéarité : $\mathcal{F}(af+bg) = a\mathcal{F}f+b\mathcal{F}g\ \forall a,b\in\mathbb{C}$
Décalage : $\mathcal{F}(f(x+b))(\alpha) = e^{ib\alpha}\mathcal{F}(f)(\alpha)$, $\mathcal{F}(e^{-i\beta x}f(x))(\alpha) = \mathcal{F}(f)(\alpha+\beta)$
Dilatation : $\mathcal{F}(f(cx)) = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}(f)(\frac\alpha c), (c\neq0)$
$\mathcal{F}(\frac{1}{|\gamma|}f(\frac x\gamma)) = \mathcal{F}(f)(\gamma\alpha), (\gamma\neq0)$
Dérivation : $f\in C^1(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^\infty|f'(x)|\,dx<+\infty; \mathcal{F}(\frac{d}{dx}f)(\alpha) = \mathcal{F}(f')(\alpha) = i\alpha\mathcal{F}(f)(\alpha)$
Si $\int_{-\infty}^\infty|xf(x)| < +\infty$ alors
$\mathcal{F}(-ixf(x))(\alpha) = (\mathcal{F}f)'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\mathcal{F}(f)(\alpha)$
$\mathcal{F}(f^{(n)})(\alpha) = (i\alpha)^n\mathcal{F}(f)(\alpha)$,
$\mathcal{F}((-ix)^nf(x))(\alpha) = (\mathcal{F}f)^{(n)}(\alpha)$

Identité de Parseval : $\int_{-\infty}^\infty|f(x)|^2\,dx<+\infty$; $\int_{-\infty}^\infty|f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^\infty|\hat f(\alpha)|^2\,d\alpha$

Parité : f paire $\implies\hat f(\alpha) = \sqrt{\frac2\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\alpha x)\,dx$, $\hat f(\alpha)$ paire
f impaire $\implies\hat f(\alpha) = -i\sqrt{\frac2\pi}\int_0^\infty f(x)\sin(\alpha x)\,dx$, $\hat f(\alpha)$ impaire

Convolution : $\int_{-\infty}^\infty|f*g(x)|\,dx<+\infty$ et $\mathcal{F}(f*g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$
Si $\int|\hat f|,|\hat g|<+\infty$, alors $\mathcal{F}^{-1}(\hat f*\hat g) = \sqrt{2\pi}f\cdot g$,
$\hat f*\hat g = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f\cdot g)$