BA2 A2 Résumé

Equ. Diff. Ordinaires : $E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ (une var. (x), inconnue, $y(x)$, ordre de l'équation $\in \mathbb{N}^*$), cherche $y \in C^n : I \to \mathbb{R}$ tq. $E = 0 \ \forall x \in I$, **linéaire** en $y, y', \dots, y^{(n)}$, **autonome** pas de x, Solution générale : ensemble de toutes les sol., Problème **Cauchy** : $y(x_0) = b_0, \dots, y'(x_1) = \dots, \dots$ (Conditions initiales), **EDVS** (Variables séparées) $F(y) \cdot y' = g(x)$ (continues) $\Rightarrow \int F(y)\,dy = \int g(x)\,dx$ ⚠ $+C \in \mathbb{R}$

Sol. maximale : sur le + grand intervalle, **EDL1** $y'(x) + p(x) y(x) = F(x)$ ($I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues) sol. $y \in C^1 : I \to \mathbb{R}$, sol. homogène ($y' + p(x) y = 0$) $y_h(x) = C e^{-P(x)}$ (une primitive de $p(x)$) $C \in \mathbb{R}$, sol. particulière : $y_0(x) = C(x) \cdot e^{-P(x)}$ où $C(x) = \int F(x) \cdot e^{P(x)}\,dx$ (une primitive (sans cst)), sol. générale : $y(x) = y_h + y_0$

EDL2 $y''(x) + p(x) y'(x) + q(x) y(x) = F(x)$ ($p, q, f : I \to \mathbb{R}$ continues), EDL2h ($y'' + py' + qy = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$) coef. cst. $\to \lambda^2 + p\lambda + q = 0$ (racines $a, b \in \mathbb{C}$) $\Rightarrow y_h(x) = \begin{cases} C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) & a = \alpha + \beta i = \bar{b} \notin \mathbb{R} \\ C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx} & a \neq b \ (\in \mathbb{R}) \\ C_1 e^{ax} + C_2 x e^{ax} & a = b \end{cases}$ $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\exists! 2$ solutions lin indé. satisfaisant $y(x_0) = t$, $y'(x_0) = s$ | $V_1(x)$ sol. part. h $\neq 0$: $V_2(x) = V_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{V_1^2(x)}\,dx$ (c(x), sans cst., lin. indé.), Sol. générale h : $y(x) = C_1 \cdot V_1(x) + C_2 \cdot V_2(x)$ ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

Wronskien $W[V_1, V_2] = \begin{vmatrix} V_1 & V_2 \\ V_1' & V_2' \end{vmatrix}$ V_1, V_2 lin. ind. $\Rightarrow W[V_1, V_2] \neq 0$ ($\forall x \in I$), EDL2 var. de constante : $C_1(x) = -\int \frac{F(x) \cdot V_2(x)}{W[V_1, V_2]}\,dx$ $C_2(x) = \int \frac{F(x) \cdot V_1(x)}{W[V_1, V_2]}\,dx$ (sans cst.) $\to$ Sol. part $y_0(x) = C_1(x) V_1(x) + C_2(x) V_2(x) \to$ (Sol. générale, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $x \in I$) $y(x) = C_1 V_1(x) + C_2 V_2(x) + y_0(x)$ | coef. indét. $F(x)$: 1) $e^{cx} R_n(x)$ (p, q cst, polyn deg n) $\Rightarrow$ (c sol λ de multiplicité r) $y_0 = (x^r) e^{cx} T_n(x)$ (polyn. deg. n coef. indét)

2) $e^{ax}(P_n(x)\cos(bx) + Q_m(x)\sin(bx))$ (polyn deg n, m) $\Rightarrow$ ($a + ib$ sol λ, oui) $y_0 = (x)\, e^{ax}(T_N(x)\cos(bx) + S_N(x)\sin(bx))$ (polyn. deg. N coef. indét) $N = \max(n, m)$ / méthode séparément : $F(x) = F_1(x) + F_2(x) \Rightarrow y_0 = y_{P_1} + y_{P_2}$ (sol. part) $\to$ (Sol. générale) $y(x) = y_h(x) + y_0(x)$

Espace $\mathbb{R}^n$: (vecteur) $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=0} x_i y_i$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\langle x, y \rangle \geq 0$, $\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $\|\bar{x}\| \geq 0$, $\|\lambda \bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$, $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$, $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$, $\|\bar{x} - \bar{y}\| \geq |\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\||$, $d(y, x) = d(x, y) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$ (distance), $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow d(x, y) = 0$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\delta > 0$ boule ouverte centre $\bar{x}$ rayon δ : $B(\bar{x}, \delta) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| < \delta\}$

$E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert : $\forall x \in E \ \exists \delta > 0$ tq. $B(\bar{x}, \delta) \subset E$ | Fermé : $CE = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin E\}$ (Complémentaire) ouvert, intérieur $\mathring{E} = \{\bar{x} \in E \mid \exists \delta > 0 \ B(\bar{x}, \delta) \subset E\}$ $(\subset E)$, E ouvert $\Leftrightarrow \mathring{E} = E$, $\bigcup$ d'ouverts $\to$ ouvert, $\bigcap$ de Fermés $\to$ Fermé | $\bigcup_{\text{Finie}}$ de Fermés $\to$ Fermé, $\bigcap_{\text{Finie}}$ d'ouverts $\to$ ouvert, $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ seuls Fermé et ouvert

adhérance : $\bar{E}$ plus petit ensemble Fermé S tq. $E \subseteq S$, E fermé $\Leftrightarrow E = \bar{E}$, Frontière : $\partial E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \delta > 0 \ E \cap B(\bar{x}, \delta) \neq \emptyset \wedge CE \cap B(\bar{x}, \delta) \neq \emptyset\}$, $\partial E \cap \mathring{E} = \emptyset$, $\mathring{E} \cup \partial E = \bar{E}$, $\partial E = \bar{E} \setminus \mathring{E}$, $\partial \mathbb{R}^n = \partial \emptyset = \emptyset$

Suites application $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, $F : k \mapsto \bar{x}_k$, $\{\bar{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{\bar{x}_k\}_{k=0}^{\infty} \xrightarrow{\text{Converge}} \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (unique) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0$ ($k_0(\varepsilon)$) $\|\bar{x}_k - \bar{x}\| \leq \varepsilon$ ($\bar{x}_k \in \overline{B(\bar{x}, \varepsilon)}$), (notation) $\lim_{k \to \infty} \bar{x}_k = \bar{x} \Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} \bar{x}_{k,j} = \bar{x}_j \ \forall j \in \{1, \dots, n\}$, Converge $\Rightarrow$ Bornée (contenue dans $\overline{B(\bar{0}, M)}$, $M > 0$), Thm. Bolzano-W : Bornée $\Rightarrow \exists$ sous-suite convergente

E compacte ssi. Fermé et borné, E compacte $\Rightarrow$ (Heine-Borel) tout recouvrement d'ouverts a un sous-recouvrement fini,

Multi-variables : $E \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) $F : E \to \mathbb{R}$, $F(E) \subset \mathbb{R}$ (Image de F), $c \in F(E)$, (ensemble de niveau, $\cap$ avec le plan $z = c$) $N_F(c) = \{\bar{x} \in E : F(\bar{x}) = c\} \subset E$, voisinage de $\bar{x}_0$ $[\exists \delta > 0 : B(\bar{x}_0, \delta) \subset E \cup \{x_0\}]$ (domaine de définition), limite : (définie au voisinage de $\bar{x}_0$) $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} F(x) = L : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ tq. $\forall \bar{x} \in E, 0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |F(\bar{x}) - L| \leq \varepsilon$

continuité : $\bar{x}_0 \in \mathring{E}$ F continue en $\bar{x} = \bar{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} F(\bar{x}) = F(\bar{x}_0)$, $F(\bar{x}) \xrightarrow[\bar{x} \to \bar{x}_0]{} L \Leftrightarrow F(\bar{a}_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} L$ $\forall$ suite $\{\bar{a}_k\} \subset E \setminus \{\bar{x}_0\} : \bar{a}_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \bar{x}_0$, polynomiales et rationnelles $\to$ Continues sur D_F, changement var. coord. polaires $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ / $g_1(\bar{x}), \dots, g_p(\bar{x})$ continues en $\bar{a} \in A$, $F(\bar{y})$ continue en $(g_1(\bar{a}), \dots, g_p(\bar{a}))$

⚠ Si elles existent TOUTES $\lim_{(x,y) \to (a,b)} F(x, y) = \lim_{x \to a}\left(\lim_{y \to b} F(x, y)\right) = \lim_{y \to b}\left(\lim_{x \to a} F(x, y)\right)$, 2 gendarmes $F, g, h : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ① $F(\bar{x}) \xrightarrow[\bar{x} \to \bar{x}_0]{} L \leftarrow g(\bar{x})$ ② $\exists \alpha > 0 : \forall \bar{x} \in \{\bar{x} \in E : 0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \alpha\}$ $F(\bar{x}) \leq h(\bar{x}) \leq g(\bar{x}) \Rightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} h(\bar{x}) = L$, $A \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{\bar{g}} B \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow F \circ \bar{g}(\bar{x})$ continue en $\bar{x} = \bar{a}$

$M, m \in F(E) \subset \mathbb{R}$ $F(\bar{x}) \leq M$ ($\geq m$) $\forall \bar{x} \in E$ M : maxi., (m : mini) F continue sur $E \subset \mathbb{R}^n$ compact $\Rightarrow \exists \max_{\bar{x} \in E} F(\bar{x})$ et $\exists \min F(\bar{x})$, E compact et connexe par chemin $\Rightarrow$ F atteint toute valeur entre m et M

Différentielle : $F : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (ouvert), $g(s) = F(a_1, \dots, s, \dots, a_n)$ (k) $\bar{a} \in E$ g dérivable en a_k : (k-ième dérivée partielle) $\frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{a}) = g'(a_k) = \lim_{t \to 0} \frac{F(\bar{a} + t \cdot \bar{e}_k) - F(\bar{a})}{t}$, $\bar{e}_k = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ (k), si toutes les dérivées partielles existent : (en $\bar{a} \in E$, gradient) $\nabla F(\bar{a}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial F}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{a})\right)$

$\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ ($\neq \bar{0}$) $g(t) = F(\bar{a} + t\bar{v})$ g dérivable en $t = 0 \Rightarrow \exists$ la dérivée directionnelle de F en $\bar{a}$ suivant $\bar{v}$: $D_F(\bar{a}, \bar{v}) = \frac{\partial F}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t}$, Si $\bar{v} = \bar{e}_i$: $D_F(\bar{a}, \bar{e}_i) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{a})$, $D_F(\bar{a}, \lambda\bar{v}) = \lambda \cdot D_F(\bar{a}, \bar{v})$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$ / ③ $\forall k \ \exists \frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{a}) = L_{\bar{a}}(\bar{e}_k)$ $\Rightarrow \nabla F(\bar{a}) = (L_{\bar{a}}(\bar{e}_1), \dots, L_{\bar{a}}(\bar{e}_n))$

F dérivable en $\bar{a}$ si $\exists L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (transformation linéaire) et $r : E \to \mathbb{R}$ tq. $F(\bar{x}) = F(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a}) + r(\bar{x})$ $\forall \bar{x} \in E$ et $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0$, $L_{\bar{a}}$: différentielle de F en $\bar{a}$ $L_{\bar{a}} = dF(\bar{a})$, (F dérivable en $\bar{a}$) $\exists L_{\bar{a}} \Rightarrow$ ① F continue en $\bar{a}$ ② $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{0}$ $\exists D_F(\bar{a}, \bar{v}) = L_{\bar{a}}(\bar{v})$

④ $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{0}$ $L_{\bar{a}}(\bar{v}) = D_F(\bar{a}, \bar{v}) = \langle \nabla F(\bar{a}), \bar{v} \rangle$ ⑤ $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ $\|\bar{v}\| = 1$ $D_F(\bar{a}, \bar{v}) \leq \|\nabla F(\bar{a})\|$ $\Rightarrow$ gradient : direction de la plus grande pente en $\bar{a}$: $D_F\left(\bar{a}, \frac{\nabla F(\bar{a})}{\|\nabla F(\bar{a})\|}\right) = \|\nabla F(\bar{a})\|$, Plan tangent : (direction ⊥ au plan tangent, surface, $\bar{a} = (x_0, y_0, F(x_0, y_0))$) $\nabla F(x, y, z) = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{a}), -\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{a}), 1\right)$ $Z = F(x_0, y_0) + \langle \nabla F(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$, $\exists D_F(\bar{a}, \bar{v}) \ \forall \bar{v} \Rightarrow \exists \frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{a}) \ \forall k$ ($\not\Leftarrow$)

$\exists \delta > 0$ tq. $\forall k \ \exists \frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{x})$ sur $B(\bar{a}, \delta)$ et sont continues en $\bar{a} \Rightarrow$ F dérivable en $\bar{a}$, $\exists k$ tq $\exists \frac{\partial F}{\partial x_k}$ en tout points $\in E \Rightarrow$ (Fonction dérivée partielle) $\frac{\partial F}{\partial x_k}(\bar{x})$ ($\in E$), $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}$ (dérivée partielle seconde) $\left(\frac{\cdot\cdot}{\partial x^2} \cdot = \frac{\cdot\cdot}{\partial x \partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$ existent dans un voisinage de $\bar{a}$ et continuent en $\bar{a}$ $\Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{a})$

$F \in C^p(E)$: toutes les dérivées partielles $\leq p$ existent et continues sur E, $F \in C^1$ (sur E) $\Rightarrow$ F dérivable, $F \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$, $F \in C^p \Rightarrow$ on peut échanger l'ordre des dérivées partielles jusqu'à l'ordre p, $F \in C^2 \Rightarrow \mathrm{Hess}(F)(\bar{a}) = \mathrm{Hess}(F)(\bar{a})^T$, $\mathrm{Hess}(F)(\bar{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{a}) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2}(\bar{a}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{a}) & & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(\bar{a}) \end{bmatrix}$

$\exists \nabla F(\bar{a}) : r(\bar{x}) = F(\bar{x}) - F(\bar{a}) - \langle \nabla F(\bar{a}), \bar{x} - \bar{a} \rangle$ $\frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} \xrightarrow[\bar{x} \to \bar{a}]{} 0 \Rightarrow$ F dérivable en $\bar{a}$, (Sinon F pas dérivable en $\bar{a}$)

Fonction dans $\mathbb{R}^m$: $\bar{F} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (n variables) $\bar{F}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ F_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, ex. $(\nabla F)^T \ E \to \mathbb{R}^n$ ($\subset \mathbb{R}^n$), K-ième dérivée partielle $\bar{a} \in E$ $\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_k}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(\bar{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k}(\bar{a}) \end{pmatrix}$ Si $F_1, \dots, F_m$ admet la $\frac{\partial}{\partial x_k}$ en $\bar{a}$, dérivée directionnelle suivant $\bar{v} \in \mathbb{R}^{n*}$ $\bar{a} \in E$ $D\bar{F}(\bar{a}, \bar{v}) = \begin{pmatrix} DF_1(\bar{a}, \bar{v}) \\ \vdots \\ DF_m(\bar{a}, \bar{v}) \end{pmatrix}$ si $DF_i(\bar{a}, \bar{v})$ existe $\forall i$ de 1 à m, $\bar{F} \xrightarrow[\bar{x} \to \bar{a}]{} \bar{L} \in \mathbb{R}^m$ si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tq.

$0 < \|\bar{x} - \bar{a}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta \Rightarrow \|\bar{F}(\bar{x}) - \bar{L}\|_{\mathbb{R}^m} \leq \varepsilon$ $\bar{F}(\bar{x}) \to \begin{pmatrix} \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} F_1(x) \\ \vdots \\ \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} F_m(x) \end{pmatrix}$, $\bar{F}$ dérivable en $\bar{a} \in E$ si $\exists \bar{L}_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (transformation liné., la différentielle) et $\bar{r} : E \to \mathbb{R}^m$ t.q. $\bar{F}(\bar{x}) = \bar{F}(\bar{a}) + \bar{L}_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a}) + \bar{r}(\bar{x})$ et $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} \frac{\bar{r}(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0$, $\bar{F}$ dérivable en $\bar{a} \in E$ ssi. $\forall F_i : E \to \mathbb{R}$ ($\forall i$ de 1 à m) dérivable en $\bar{a} \Rightarrow \bar{L}_{\bar{a}}(\bar{v}) = \begin{pmatrix} L_{1,\bar{a}}(\bar{v}) \\ \vdots \\ L_{m,\bar{a}}(\bar{v}) \end{pmatrix}$ $\bar{v} \in \mathbb{R}^{n*}$ $\Rightarrow L_{i,\bar{a}} = DF_i(\bar{a}, \bar{v}) = \langle \nabla F_i(\bar{a}), \bar{v} \rangle$

Jacobienne : $\bar{F}$ possède toutes les dérivées partielles en $\bar{a} \in E$: ($m \times n$) $J_{\bar{F}}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla F_1(\bar{a}) \\ \vdots \\ \nabla F_m(\bar{a}) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \bar{F}(\bar{a})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \bar{F}(\bar{a})}{\partial x_n}\right)$, $\bar{F}$ dérivable en $\bar{a} \in E$ $J_{\bar{F}}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} L_{1,\bar{a}}(\bar{e}_1) & \cdots & L_{1,\bar{a}}(\bar{e}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{m,\bar{a}}(\bar{e}_1) & \cdots & L_{m,\bar{a}}(\bar{e}_n) \end{pmatrix}$ et $D\bar{F}(\bar{a}, \bar{v}) = J_{\bar{F}}(\bar{a}) \cdot \bar{v}$, Si $m = n$ $|J_{\bar{F}}(\bar{a})| = \frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det(J_{\bar{F}}(\bar{a}))$, Si $F\in C^2(E)$: $J_{(\nabla F)^T}(\bar x)=\mathrm{Hess}(F)(\bar x)$, $\mathbb{R}^n\xrightarrow{\bar g}\mathbb{R}^p\xrightarrow{\bar F}\mathbb{R}^q$ $\bar g$ dérivable en $\bar a\in\mathbb{R}^n$, $\bar F$ dérivable en $\bar b=\bar g(\bar a)\in\mathbb{R}^p$ $L_{\bar a}(\bar F\circ\bar g)=L_{\bar b}\bar F\circ L_{\bar a}\bar g$ (différentielle de F, différentielle de g) $J_{\bar F\circ\bar g}(\bar a)=J_{\bar F}(\bar g(\bar a))\cdot J_{\bar g}(\bar a)$ ($\nabla(F\circ g)=\nabla F\cdot J_g$) Si $n=p=q$: $|J_{\bar F\circ\bar g}(\bar a)|=|J_{\bar F}(\bar g(\bar a))|\cdot|J_{\bar g}(\bar a)|$, $\bar h$ un changement de variables $\mathbb{R}^n\underset{\bar h^{-1}}{\overset{\bar h}{\rightleftarrows}}\mathbb{R}^n$ $J_{\bar h^{-1}\circ\bar h}=I_n$ $|J_{\bar h^{-1}}|\cdot|J_{\bar h}|=1$ $J_{\bar h^{-1}}(\bar h(\bar a))^{-1}$,

$\bar g:E\to D$ ($\subset\mathbb{R}^n$, $\subset\mathbb{R}^n$) continûment dérivable: $\bar g$ bijective dans un voisinage de $\bar a\in E$ $\Leftrightarrow |J_{\bar g}(\bar a)|\neq 0$, $F:[a,b]\times I\to\mathbb{R}$ ($\subset\mathbb{R}$ ouvert) tq. $\frac{\partial F}{\partial y}$ continue sur $[a,b]\times I$ $\Rightarrow g(y)=\int_a^b F(x,y)\,dx\in C^1(I)$ et $g'(y)=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dx$ $\forall y\in I$, $g,h:I\to\mathbb{R}$ ($\subset\mathbb{R}$) continûment dérivables et $F:J\times I\to\mathbb{R}$ (ouverts) tq. $\frac{\partial F}{\partial t}$ continue sur I :

$F(t)=\int_{h(t)}^{g(t)}f(x,t)\,dx$ ($\in C^1(I)$) $\to F'(t)=f(g(t),t)\cdot g'(t)-f(h(t),t)\cdot h'(t)+\int_{h(t)}^{g(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$, $J_{F^{-1}}(x,y)=[J_F(F^{-1}(x,y))]^{-1}$

Applications: Laplacien $\Delta F:E\to\mathbb{R}$ ($F:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$) $\Delta F(x_1,..,x_n)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$ ($\mathrm{tr}(\mathrm{Hess}_F)$), harmonique: $\Delta F=0$ sur tout E, (A compact: atteint son min/max sur ∂A) Taylor: $\exists\delta>0$ tq $\forall\bar x\in B(\bar a,\delta)\cap E$ $\exists\theta$ $0<\theta<1$ tq $F(\bar x)=\sum_{i=0}^p\frac{1}{i!}F^{(p)}(0)+\frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta)$ ($F:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $F\in C^{p+1}(B(\bar a,\delta))$, $F:I\subset[0,1]\to\mathbb{R}$ $F(t)=F(\bar a+t(\bar x-\bar a))$, $\mathcal{E}(\|\bar x-\bar a\|^p)$), Point Stationnaire: $\nabla F(\bar p)=\bar 0$, ($F:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$)

$F(\bar x)$ $\geq F(\bar p)$ min / $\leq F(\bar p)$ max local $\forall\bar x\in E\cap B(\bar a,\delta)$, $\bar p$ extremum local et $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar p)$ existent $\forall i\Rightarrow\bar p$ stationnaire, Point Critique: $\bar p$ stationnaire $\vee$ au min. une des $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar a)$ n'existe pas, $\bar p$ stationnaire + valeurs propres $H=\mathrm{Hess}_F(\bar p)$ ($F\in C^2(E)$): $\lambda_i>0\ \forall i\Rightarrow$ min local ; $\lambda_i<0\ \forall i\Rightarrow$ max local ; $\lambda_i>0,\lambda_j<0\Rightarrow$ pas extremum ($\mathrm{Hess}_F(\bar a)$ diagonalisable)

n=2 $H=\begin{pmatrix}r&s\\s&t\end{pmatrix}$: $\det H>0$: $r>0\to$ min, $r<0\to$ max local ; $\det H<0$ pas d'extremum. n=3 $\Delta_3=\det H$, $\Delta_1=H_{0,0}$ $\Delta_2=\begin{vmatrix}H_{0,0}&H_{0,1}\\H_{1,0}&H_{1,1}\end{vmatrix}$: $\Delta_1>0,\Delta_2>0,\Delta_3>0$ min. ; $\Delta_1<0,\Delta_2>0,\Delta_3<0$ max loc ; else if $\Delta_3\neq0$ pas d'extr. loc. ; min, max D compact: ① pts. critiques sur $\mathring{D}\to F(\bar c_i)$ ② min., max. de $F(\partial D)\to F(\bar d_j)$ } min max

Fonctions implicites: $f=F(\bar x)=$ équation, niveau C ($\in\mathbb{R}$): $F(\bar x)=C$ (ligne/surface/..), TFI: $F:E\to\mathbb{R}$ ($\subset\mathbb{R}^{n\geq2}$) tq. $F\in C^1$ autour de $\bar a\in E$ $F(\bar a)=0\wedge\frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar a)\neq0\Rightarrow$ $\exists\check a\in\mathbb{R}^{n-1}$, $f\ B(\check a,\delta)\to\mathbb{R}$ tq ① $a_n=f(a_1,...,a_{n-1})$ ② $F(x,...,x_{n-1},f(x_1,...,x_{n-1}))=0$ ($\forall\bar x\in B(\check a,\delta)$) ③ $\frac{\partial f}{\partial x_p}(x_1,..,x_{n-1})=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_p}(x_1,...,x_{n-1},f(x_1,...,x_{n-1}))}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1,...,x_{n-1},f(x_1,...,x_{n-1}))}$ $\forall p\in\{1,..,n-1\}$, $f\in C^1(B(\check a,\delta))$

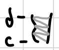
(hyper) plan tangent: si $F(\bar x)\in C_1(E\subset\mathbb{R}^n)\wedge\exists i:1\leq i\leq n$ tq. $\exists\bar a\in E\cdot\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar a)\neq0$ $F(\bar a)=0$ $\nabla F(\bar a)\neq0$ $\overset{\text{TFI}}{\Longrightarrow}$ tangent à $F(\bar x)=0$ en $\bar a$ $\langle\nabla F(\bar a),\bar x-\bar a\rangle=0$; $z=f(a,b)+\langle\nabla f(a,b),(x-a,y-b)\rangle$

Multiplicateur Lagrange: $f,g_1,..,g_m: E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ($\in C^1$, $m\leq n-1$) $\bar a\in E$ extremum sous contraintes $g_1(\bar x)=...=g_m(\bar x)=0$ $\nabla g_1(\bar a),...,\nabla g_m(\bar a)$ lin. indépendants $\nabla g(\bar x)\neq0$ $\forall\{\bar x: g(\bar x)=0\}$ ($\forall g$) $\Rightarrow\exists\bar\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_m)$ ($\in\mathbb{R}^m$) tq. $\nabla f(\bar a)=\sum_{k=1}^m\lambda_k\nabla g_k(\bar a)$

Integration: pavé Fermé: $P\subset\mathbb{R}^n$ $P=[a_1,b_1]\times...\times[a_n,b_n]$ ($a_i<b_i$ $\forall i\in\{1,...,n\}$), volume $|P|=\prod_{i=1}^n(b_i-a_i)$, subdivision de P: $\sigma=(\sigma_1,...,\sigma_n)$ ($\sigma_j=\{a_j=x_0^j<x_1^j<...<x_{n_j}^j=b_j\}$), sommes Darboux: ($f:P\to\mathbb{R}$) bornée sur P $\underline{S}_\sigma(f)=\sum_{Q\in\sigma}m(Q)|Q|$ ($\inf_{\bar x\in Q}(f(\bar x))$) $\overline{S}_\sigma(f)=\sum_{Q\in\sigma}M(Q)|Q|$ ($\sup_{\bar x\in Q}(f(\bar x))$) $\underline{S}(f)=\sup_{\sigma\in P}\underline{S}_\sigma$ $\overline{S}(f)=\inf_{\sigma\in P}\overline{S}_\sigma$ (Sommes de darboux),

$\underline{S}(f)\leq\overline{S}(f)$, $f:P\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (bornée sur P) f intégrable ssi. $\underline{S}(f)=\overline{S}(f)\to=\int_P f(\bar x)d\bar x=\int...\int f(x_1,..,x_n)dx_1...dx_n$, $\int_P C\,d\bar x=C\cdot|P|$ ($\in\mathbb{R}$), f continue $\Rightarrow$ f intégrable sur P, $\int_{\bigcup_{i\in I}P_i}f(\bar x)d\bar x=\sum_{i\in I}\int_{P_i}f(\bar x)d\bar x$ (pavé fermé), $\int_P(\alpha f(\bar x)+g(\bar x))d\bar x=\alpha\int_P f(\bar x)d\bar x+\int_P g(\bar x)d\bar x$ ($\in\mathbb{R}$, continues), ($\forall\bar x\in P$ $|f(\bar x)|\leq k\in\mathbb{R}_+$) $\Rightarrow-k\cdot|P|\leq\int_P f(\bar x)d\bar x\leq k\cdot|P|$,

volume sous la surface $z=f(x,y)$ $V=\iint_P f(x,y)\,dxdy$ ($P\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ intégrable), l'ordre d'intégration n'est pas important sur P (pavé fermé), $E\subset P\subset\mathbb{R}^n$ $f:E\to\mathbb{R}$ (bornée sur E) $\hat f(\bar x)=\begin{cases}f(\bar x), & \bar x\in E\\0, & \bar x\in P\setminus E\end{cases}$ ($\hat f$ intégrable sur P $\vee$ (f continue sur $\mathring{E}$ et ∂E assez régulière (mesure nulle))) $\Rightarrow$ f intégrable sur E $\int_E f(\bar x)d\bar x=\int_P\hat f(\bar x)d\bar x$,

Ⓘ  $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ (continues) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: a<x<b,\varphi_1(x)<y<\varphi_2(x)\}$ ($\forall x\in]a,b[$ $\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$) $\Rightarrow f:\bar D\to\mathbb{R}$ (continue) $\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy\right)dx$ Ⓘⓘ  $\psi_1,\psi_2:[c,d]\to\mathbb{R}$ (continues) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\psi_1(y)<x<\psi_2(y), c<y<d\}$ ($\forall y\in]c,d[$ $\psi_1(y)<\psi_2(y)$) $\Rightarrow f:\bar D\to\mathbb{R}$ (continue) $\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,dx\right)dy$,

 E $z=H(x,y)$, $z=G(x,y)$ $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues $\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$ $\forall x\in]a,b[$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ a<x<b,\varphi_1(x)<y<\varphi_2(x)\}$ $G,H:\bar D\to\mathbb{R}$ continues $G(x,y)<H(x,y)$ $\forall(x,y)\in D$ $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in D, G(x,y)<z<H(x,y)\}$ $f:\bar E\to\mathbb{R}$ continue $\to$ intégrable sur E $\iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int_{G(x,y)}^{H(x,y)}f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$,

E compact $E\subset\mathbb{R}^n$ $\Psi\in C^1(E):E\to\Psi(E)$ bijective $f:\bar D=\overline{\Psi(E)}\to\mathbb{R}$ (continue) $\int_D f(\bar x)d\bar x=\int_E f(\Psi(\bar u))|\det J_{\Psi(\bar u)}|d\bar u$, polaires: $G(r,\varphi)=\begin{cases}r\cdot\cos\varphi=x\\r\cdot\sin\varphi=y\end{cases}$ ($[0,2\pi[$) $\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{G^{-1}(D)}f(r\cdot\cos\varphi,r\cdot\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$ ($|J_G|$), sphériques: $G(r,\theta,\varphi)=\begin{cases}r\sin\theta\cos\varphi=x\\r\cdot\sin\theta\sin\varphi=y\\r\cdot\cos\theta=z\end{cases}$ ($[0,\pi]$, $[0,2\pi[$) $|J_G|=r^2\cdot\sin\theta$,

cylindriques: $G(r,\varphi,z)=\begin{cases}x=r\cdot\cos\varphi\\y=r\cdot\sin\varphi\\z=z\end{cases}$ ($[0,2\pi[$) $|J_G|=r$, masse: $M=\iiint_V\rho(x,y,z)\,dxdydz$

DL: $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3$, $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3$, $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$, $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, $\cos x=1-\frac{x^2}{2}$, $\sin x=x-\frac{x^3}{6}$

Méthodes de preuve: directe $P\Rightarrow Q$, contraposée $\neg Q\Rightarrow\neg P$, $P\Leftrightarrow Q$: $P\Leftrightarrow...\Leftrightarrow Q$ ou $(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow P)$, absurde $\neg P\Rightarrow F$ (évidemment Fausse), n objets dans k tiroirs $\Rightarrow$ au moins un tiroir avec $\lceil\frac{n}{k}\rceil$ objets

$n,n_0\in\mathbb{N}$ récurrence: $P(n_0)$ vraie (initialisation) et $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ (hérédité) ($P(n_0),..,P(n_0+k)$ vraies $\wedge\{P(n),..,P(n+k)\}\Rightarrow P(n+k+1)$ (généralisée) $|$ $P(n_0)$ vraie $\wedge\{P(n_0),P(n_0+1),..,P(n)\}\Rightarrow P(n+1)$ (forte)) $\forall n\geq n_0\Rightarrow P(n)$ vraie $\forall n\geq n_0$,

2 variables récurrence $P(0,0)\wedge P(n,0)\Rightarrow P(n+1,0)$ $\forall n\geq0\wedge P(n,m)\Rightarrow P(n,m+1)$ $\forall m,n$ (carré), $\forall m,n$ $P(n,m)\Rightarrow P(n+1,m)$ $P(n+1,m)\Rightarrow P(n,m+1)$ (diagonale)