Géométrie Analytique – CMS – Résumé

1^{er} semestre

Vecteurs : colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u}=\alpha\cdot\vec{v}$, $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$, $M'=t_{\vec{u}}(M)$ $\vec{MM'}=\vec{u}$, $M'=h_{\Omega,\alpha}(M)$ $\vec{\Omega M'}=\alpha\vec{\Omega M}$,
$t_{\vec{u}}\circ t_{\vec{v}}=t_{\vec{u}+\vec{v}}$, $h_{\Omega,\alpha}\circ t_{\vec{u}}=h_{t_{\frac{\alpha\vec{u}}{1-\alpha}}(\Omega),\alpha}$, $t_{\vec{u}}\circ h_{\Omega,\alpha}=h_{t_{\frac{\vec{u}}{1-\alpha}}(\Omega),\alpha}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\theta$,
$h_{\Omega_1,\alpha}\circ h_{\Omega_2,\beta}=\begin{cases}t_{(\alpha-1)\vec{\Omega_1\Omega_2}}, \text{ si } \alpha\cdot\beta=1\\ h_{t_{\frac{\alpha-1}{1-\alpha\beta}\vec{\Omega_1\Omega_2}}(\Omega_2),\alpha\beta}, \text{ si } \alpha\beta\neq1\end{cases}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}>0\Leftrightarrow\theta<\frac{\pi}{2}$,
$\vec{u}\cdot\vec{v}<0\Leftrightarrow\theta>\frac{\pi}{2}$, $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$, $P_{\vec{v}}(\vec{u})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\cdot\vec{v}$, $S_{\vec{u}}(\vec{v})=2P_{\vec{u}}(\vec{v})-\vec{v}$

Plan : $d: \vec{OM}=\vec{OA}+t\vec{u}$ $t\in\mathbb{R}$, $d: \vec{OM}\cdot\vec{n}=cte.=\vec{OA}\cdot\vec{n}$, $d:\begin{cases}x=x_a+t\cdot\alpha\\ y=y_a+t\cdot\beta\end{cases}$, $d: \beta\cdot x-\alpha\cdot y=cte.$,
$\delta(d,P)=\|\vec{PP'}\|=\frac{|\vec{PB}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $d: ax+by+c=0$ $\vec{v}=\binom{-b}{a}$ $\left(-\frac{c}{a};0\right),\left(0;-\frac{c}{b}\right)\in d$,
$\cos\theta=\frac{|a'a+bb'|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}}$ (orthonormé)

Triangle : (médiannes $\to$ centre de gravité): $\vec{AM}=t\cdot\vec{AI}=t\cdot\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$ $G: \vec{AG}=\frac{2}{3}\vec{AI}$,
(médiatrices $\to$ centre $C_{circonscrit}$): $\vec{IM}\cdot\vec{BC}=0$ $C_c: \|\vec{C_cA}\|=\|\vec{C_cB}\|=\|\vec{C_cC}\|$, (hauteurs $\to$ orthocentre):
$\vec{CM}\cdot\vec{AB}=0$ $H: \tan\alpha\cdot\vec{HA}+\tan\beta\cdot\vec{HB}+\tan\gamma\cdot\vec{HC}=\vec{0}$, (bissectrices $\to$ centre $C_{inscrit}$): $\overbrace{\frac{1}{\|\vec{AB}\|}\vec{AB}+\frac{1}{\|\vec{AC}\|}\vec{AC}}^{\text{vect. dir. bis. inter.}}$
$\overbrace{-\frac{1}{\|\vec{AB}\|}\cdot\vec{AB}+\frac{1}{\|\vec{AC}\|}\vec{AC}}^{\text{vect. dir. bis. ext.}}$ $C_i: \vec{AC_i}=\frac{\|\vec{AC}\|}{\|\vec{BC}\|+\|\vec{AC}\|+\|\vec{AB}\|}\cdot\vec{AB}+\frac{\|\vec{AB}\|}{\|\vec{BC}\|+\|\vec{AC}\|+\|\vec{AB}\|}\cdot\vec{AC}$, $A_{ABC}=\frac{1}{2}\|\vec{AB}\|\cdot h\overset{\text{ortho. norm.}}{=}\frac{1}{2}|\det(\vec{AB},\vec{AC})|$

Transformations : $\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$, $\sin\theta=\frac{|\det(\vec{u},\vec{v})|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$, $m=\tan\theta$, $\vec{U_\theta}=\cos\theta\cdot\vec{a}+\sin\theta\cdot\vec{b}$, (translation):
$\binom{x'}{y'}=I_2\binom{x}{y}+\binom{\alpha}{\beta}$, $\binom{x'}{y'}=\alpha I_2\binom{x}{y}+(1-\alpha)\binom{x_\Omega}{y_\Omega}$: (homothétie) $H_\alpha=\alpha I_2$ PF: Ω, (rotation): $r_{\Omega,\theta}$:
$\binom{x'}{y'}=R_\theta\binom{x}{y}+(I_2-R_\theta)\binom{x_\Omega}{y_\Omega}$ $R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\to\det R_\theta=1$ PF: Ω, (proj. ortho.): $\binom{x'}{y'}=P\binom{x}{y}+(I_2-P)\binom{x_\Omega}{y_\Omega}$
$P=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1 & m\\ m & m^2\end{pmatrix}\to$ (symétrique, $\det P=0$, $\mathrm{tr}P=1$) PF: droite d $\mathrm{Ker}P=L$ ($\perp d$ $O\in L$) ($m=\infty$, $\theta=\frac{\pi}{2}$: $P=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$),
(réflexion): $\binom{x'}{y'}=S_\theta\binom{x}{y}+(I_2-S_\theta)\binom{x_\Omega}{y_\Omega}$ $S_2=S_{2\theta}=\begin{pmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{pmatrix}=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}\to$ (symétrique, $\det S_\theta=-1$, $\mathrm{tr}S_\theta=0$)
$\vec{U_{2\theta}}=\binom{\cos2\theta}{\sin2\theta}$ PF: droite L ($\perp d$ $O\in L$), (réflexion glissée): $\binom{x'}{y'}=S\binom{x}{y}+\overset{S(O)}{\binom{\alpha}{\beta}}$ $S=t_{\vec{u}}\circ S_d=S_d\circ t_{\vec{u}}$
$S\circ S=t_{2\vec{u}}$ pas de PF (si $\vec{u}=0$: réflexion) $\vec{u}=\frac{1}{2}(I_2+S)\binom{\alpha}{\beta}$ $S_d=t_{\vec{u}}^{-1}\circ S$, (Compositions):
$R_\theta R_\varphi=R_{\theta+\varphi}$, $S_\theta S_\varphi=R_{2(\theta-\varphi)}$, $S_\theta R_\varphi=S_{\theta-\frac{\varphi}{2}}$, $R_\theta S_\varphi=S_{\theta+\frac{\varphi}{2}}$, $S_d\circ S_g=\begin{cases}r_{\Omega,2(\theta-\varphi)} & \text{si } \varphi\neq\theta\\ t_{2\vec{u}} & \text{si } \varphi=\theta\end{cases}$ (mod 2π),
$r_{\Omega,\theta}\circ r_{\Omega,\varphi}=\begin{cases}r_{\Omega,\theta+\varphi} \text{ si } \theta\neq-\varphi\\ \text{translation si } \theta=-\varphi\end{cases}$ (mod 2π), $r_{\Omega,\theta}\circ S_d=\begin{cases}\text{réfl. gliss.}\\ \text{cas général}\end{cases}$, $\left.\begin{cases}r_{\Omega,\theta}\circ S_d=S_g\\ S_d\circ r_{\Omega,\theta}=S_L\end{cases}\text{si } \Omega\in d\right\}$ 

Espace : $\pi_1=O_{xy}$ $(z=0)$, $\pi_2=O_{yz}$ $(x=0)$, $\pi_3=O_{xz}$ $(y=0)$, $O_x:\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}$, $O_y:\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}$, $O_z:\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, (droites):
$\vec{OM}=\vec{OA}+\lambda\vec{v}$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ $\frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3}$, (droite pr. plan): $v_1=0\Rightarrow\parallel\pi_2$, $v_2=0\Rightarrow\parallel\pi_3$, $v_3=0\Rightarrow\parallel\pi_1$
coplanaires
tester $A\in\pi$, (droite pr. droite): séquentes $\Leftrightarrow\exists I$ tq. $d\cap d'=\{I\}$, $d\parallel d'\Leftrightarrow\vec{v}=\alpha\vec{v}'$ et $A\notin d'$, confondues
$\Leftrightarrow\vec{v}=\alpha\vec{v}'$ et $A\in d'$, gauches $\Leftrightarrow\vec{v}\neq\alpha\vec{v}'$ ($\forall\alpha\in\mathbb{R}^*$) et $d\cap d'=\varnothing$, (plans): $\vec{OM}=\vec{OA}+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$
$ax+by+cz+d=0$, (plan pr. plan): séquents $\Leftrightarrow(a,b,c)\neq\lambda(a',b',c')$ ($\forall\lambda\in\mathbb{R}^*$) ($\Rightarrow d:\begin{cases}\pi\\ \pi'\end{cases}$) / $\vec{u}'$ ou $\vec{v}'$ pas comb. lin. de $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
$\pi\parallel\pi'\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^*$ tq. $(a,b,c)=\lambda(a',b',c')$ et $d\neq\lambda d'$ / $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ comb. lin. de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $A'\notin\pi$,

Confondus $\Leftrightarrow \overset{\in \mathbb{R}^*}{\exists \lambda}$ t.q. $(a, b, c, d) = \lambda(a', b', c', d')$ / $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ comb. lin. de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $A' \in \pi$, (plans particuliers):

$c=0 \Rightarrow /\!/$ à $\vec{e}_3$, $b=0 \Rightarrow /\!/$ à $\vec{e}_2$, $a=0 \Rightarrow /\!/$ à $\vec{e}_1$, (ortho. norm.): $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, partie homogène du plan vérifie

les vect. dir., $\delta(P, \alpha) = \left| \overrightarrow{AP} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right|$ $\forall A \in \alpha$, $\measuredangle(d, \alpha)$: $\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{d}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{d}\|}$ et $\varphi \in [0; \pi/2]$, $\measuredangle(\alpha; \beta)$: $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|}$ et $\varphi \in [0; \pi/2]$