1er semestre

# Algèbre linéaire - CMS - Résumé

**Ensembles et logique:** $A \subset E \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in E$, $A \not\subset E \Leftrightarrow \exists x \in A, x \notin E$, $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$,
($A = \{x \in E \mid x$ vérifie $P\}$ $B = \{x \in E \mid x$ vérifie $Q\}$) non(P ou Q) $\Leftrightarrow \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \Leftrightarrow$ non(P) et non(Q),
non(P et Q) $\Leftrightarrow \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \Leftrightarrow$ non(P) ou non(Q), $A \cap B = B \cap A$, $(A \subset B)$ et $(B \subset C) \Rightarrow A \subset C$,
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

**Propositions:** ($T: \forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$) non T: $\exists x \in E$ tq. $P(x)$ et non($Q(x)$) vraies ("$P \not\Rightarrow Q$"),
$C: \forall x \in E$, non($Q(x)$) $\Rightarrow$ non($P(x)$) (non Q $\Rightarrow$ non P), $R: \forall x \in E, Q(x) \Rightarrow P(x)$

**Récurence:** ($Q(n), n \in \mathbb{N}$) 1) $Q(n_0)$ vraie, 2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq n_0$ $Q(n)$ vraie $\Rightarrow Q(n+1)$ vraie, $\Rightarrow Q(n)$ vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \geq n_0$

**Dénombrement:** (Card $E = n$, Card $A = k$, $k \leq n$), $\binom{n}{k}$: nb. de ss-ens. A, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ : nb. de ss-ens. de E

**Applications:** f est une application ssi. $\forall x \in E$ $\exists f(x) \in F$ unique, (E: départ, F: arrivée),
$\text{Im} f = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$, ($A \subset E$, $H \subset F$), $f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}$,
$f^{-1}(H) = \{x \in E \mid f(x) \in H\}$, $f(A) \subset \text{Im} f$, $f^{-1}(H) \subset E$, $\text{Id}_E: E \to E$ $x \mapsto x$, $f = g \Leftrightarrow E = G$ et $F = J$ et $f(x) = g(x)$ $\forall x \in E$,
$g \circ f(x) = g(f(x))$, $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$, $g \circ f \neq f \circ g$

**Injections et Surjections:** f injective $\Leftrightarrow \forall x, x' \in E$ $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$, (preuve pas injective: négation):
$\exists x, x' \in E$ $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$ (contre exemple), (preuve injective: contraposée): $\forall x, x' \in E$ $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$,
f surjective $\Leftrightarrow \forall y \in F$ $\exists x \in E$ tq. $y = f(x)$, (preuve surjective: définition), (étude surjectivité): étude $f^{-1}(\{y\})$,
(preuve pas surjective: négation): $\exists y \in F$ $\forall x \in E$ $y \neq f(x)$, bijective $\Leftrightarrow$ injective et surjective $\Leftrightarrow$ card $E$ = card $F$
($x = f^{-1}(f(x))$, $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$)

**Calcul matriciel $M_2(\mathbb{R})$:** $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ($A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: échange colonnes, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$: échange les lignes),
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$, $\text{tr} A = a + d$, $\det A = a \cdot d - c \cdot b$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

**Applications linéaires ($\mathbb{R}^2$):** f est linéaire $\Leftrightarrow f(x;y) = x \cdot (a;c) + y(b;d) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $f(0;0) = (0;0)$,
$f(1;0) = (a;c)$, $f(0;1) = (b;d)$, $f((x;y) + (x';y')) = f(x;y) + f(x';y')$, $f(t \cdot (x;y)) = t \cdot f(x;y)$, ($f \circ g$) linéaires: $A \cdot B$,
$\text{Im} f = \{x \cdot (a;c) + y(b;d) \mid (x;y) \in \mathbb{R}^2\}$ (↳ ss-ens. d'arrivée), $\text{Ker} f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ (↳ ss-ens. de départ), $f^{-1}(\{(x';y')\}) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\}$,
rg A (rg f): 0 pour matrice nulle $\Leftrightarrow \text{Im} f = \{(0;0)\} \Leftrightarrow \text{Ker} f = \mathbb{R}^2$, $f^{-1}(\{(x';y')\}) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } (x';y') \neq (0;0) \\ \mathbb{R}^2 \text{ si } (x';y') = (0;0) \end{cases}$, 1 pour $\det A = 0$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ proporcionel à $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{Im} f$: droite engendrée par $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{Ker} f$: droite engendrée par $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \Leftrightarrow f^{-1}(\{(x';y')\}) = \begin{cases} \emptyset \text{ si } (x';y') \notin \text{Im} f \\ d \,//\, \text{à Ker} f \text{ si } (x';y') \in \text{Im} f \end{cases}$,
2 pour $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ linéairement indépendant $\Leftrightarrow$ matrice inversible $\Leftrightarrow$ application surjective $\Leftrightarrow \text{Im} f = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \text{Ker} f = (0;0)$,
$\Leftrightarrow f^{-1}(\{(x';y')\})$ = unique couple solution, $\dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f) = 2$

**Représentation:** $P=\begin{pmatrix}\lambda & \rho\\ \mu & \sigma\end{pmatrix}$, $B=(\lambda;\mu),(\rho;\sigma)$, $\det P\neq 0$, $[(x;y)]_B=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\det([F]_B)=\det A$,

$\mathrm{tr}([F]_B)=\mathrm{tr}A$, $\mathrm{rg}([F]_B)=\mathrm{rg}A$, $[F]_B=P^{-1}\cdot A\cdot P=(F(\lambda;\mu);F(\rho;\sigma))$, $A=P\cdot[F]_B\cdot P^{-1}$,

$[F(x;y)]_B=[F]_B\,[(x;y)]_B$, projection: $(x;y)\longmapsto x'(\lambda;\mu)=\overbrace{\frac{1}{\lambda\sigma-\mu\rho}}^{\text{Fixe}}\overbrace{(\sigma x-\rho y)}^{\text{noyau}}\overbrace{(\lambda;\mu)}^{\text{image}}$

**Réduction:** $(A\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{v}$, $\lambda$: val. prp., $\vec{v}$: vect. prp. $(\neq\vec{0})\Leftrightarrow(A-\lambda I_2)\vec{v}=0$, $\det(A-\lambda I_2)=0)$, $\chi_F(x)=x^2-\mathrm{tr}A\cdot x+\det A$

$\to\chi_F(x)=0$ $x\to$ vals. prp., $\underbrace{\mathrm{Ker}(F-\omega\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})}_{\text{vect. prp.}\setminus\{(0;0)\}}$: $\begin{cases}\mathrm{rg}=0\to\mathbb{R}^2 & (F=\omega\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\text{ homothétie})\\ \mathrm{rg}=1\to\text{droite vect.}\end{cases}$, $(A-\omega I_2)(A-\xi I_2)=(0;0)$, $\Delta=(\mathrm{tr}A)^2-4\cdot\det A$,

$\begin{cases}F(\lambda;\mu)=\omega(\lambda;\mu)\\ F(\rho;\sigma)=\xi(\rho;\sigma)\end{cases}\Leftrightarrow$ $(\lambda;\mu)$ et $(\rho;\sigma)$ sont vect. prp., $\Delta>0\Rightarrow$ diagonalisable $\Leftrightarrow\chi_F(x)=(x-\omega)(x-\xi)\Leftrightarrow$ 2 val. prp. $\Leftrightarrow([F]_B)=R=\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \xi\end{pmatrix}$

vect. prp. de $\omega$ — vect. prp de $\xi$

$B=((\lambda;\mu),(\rho;\sigma))$, $\Delta=0$ $A=\omega I_2\Rightarrow$ diagonalisée n'importe quelle base, $\Delta=0$ $A\neq\omega I_2\Rightarrow\chi_F(x)=(x-\omega)^2$

$B=((\rho;\sigma),(\lambda;\mu))$

$\Leftrightarrow$ 1 val. prp $\omega=\frac{\mathrm{tr}A}{2}\Leftrightarrow([F]_B=)\,R=\begin{pmatrix}\omega & 1\\ 0 & \omega\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 1 & \omega\end{pmatrix}$ $\mathrm{Ker}(A-\omega I_2)=\mathrm{Im}(A-\omega I_2)\to$ droite engendrée

$\notin\mathrm{Ker}(A-\omega I_2)$

$B=((A-\omega I_2)(\rho;\sigma),(\rho;\sigma))$, $\Delta<0\Rightarrow\chi_F(x)=(x-\omega)^2-\xi^2\Leftrightarrow\omega=\frac{\mathrm{tr}A}{2}$ $\xi=\pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

au choix

$\Leftrightarrow([F]_B=)\,R=\begin{pmatrix}\omega & -\xi\\ \xi & \omega\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}\omega & \xi\\ -\xi & \omega\end{pmatrix}$ $B=((\lambda;\mu),\frac{1}{\xi}(A-\omega I_2)(\lambda;\mu))$, $R=P^{-1}AP$ $A=PRP^{-1}$

Forme réduite

**Application réduction:** $A^n=PR^nP^{-1}$, $\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \xi\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\omega^n & 0\\ 0 & \xi^n\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\omega & 1\\ 0 & \omega\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\omega^n & n\cdot\omega^{n-1}\\ 0 & \omega^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\omega^n & (\omega^n)'\\ 0 & \omega^n\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}\omega & -\xi\\ \xi & \omega\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ où $\rho=\sqrt{\omega^2+\xi^2}$ $\cos\theta=\frac{\omega}{\rho}$ $\sin\theta=\frac{\xi}{\rho}\Rightarrow\begin{pmatrix}\omega & -\xi\\ \xi & \omega\end{pmatrix}^n=(\rho\cdot R_\theta)^n=\rho^n\cdot R_{n\theta}$,

$\begin{pmatrix}U_n\\ V_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}U_0\\ V_0\end{pmatrix}$, $\{[F]_B,\ B\text{ base de }\mathbb{R}^2\}$: $\Delta\neq 0$ $\{B\in M_2(\mathbb{R})\mid\chi_B(x)=\chi_A(x)\}$, $\Delta=0$ $\begin{cases}\{\omega I_2\} & \text{si } A=\omega I_2\\ \{B\mid\chi_B(x)=(x-\omega)^2\}\setminus\{\omega I_2\} & \text{si } A\neq\omega I_2\end{cases}$

$S^{-1}AS=R=T^{-1}BT\Rightarrow B=TS^{-1}AST^{-1}=P^{-1}AP=[F]_B$ où $P=ST^{-1}$

$2^{\text{ème}}$ semestre

# Algèbre linéaire - CMS - Résumé

**Calcul matriciel $M_3(\mathbb{R})$:** $\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$, $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$, $\det(\lambda C_1/L_1, \dots) = \lambda \det(C_1/L_1, \dots)$, $\det(L/C_1' + L/C_1'', \dots) = \det(L/C_1', \dots) + \det(L/C_1'', \dots)$, $\det(L/C_1, L/C_2, \dots) = -\det(L/C_2, L/C_1, \dots)$,

$\operatorname{tr} A = a + e + i$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, $\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)$, $A^{-1}$: $Ax = b$,

$A$ inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

**Application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:** 1. ADD: $f(v+w) = f(v) + f(w)$ 2. SCAL: $f(\alpha v) = \alpha f(v)$,

rang: nb. max de L/C lin. indép., $f^{-1}(a,b,c) \to$ translaté du Ker (si $(a\,b\,c) \in \operatorname{Im} f$), $(B: P, B': Q)$,

$[f]_{B,B'} = Q^{-1} A P$, $A = Q [f]_{B,B'} P^{-1}$, $\operatorname{rg}([f]_{B,B'}) = \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A$, $[a,b,c]_B = P(a,b,c)$, $B = v_1, v_2, v_3$, $B' = w_1, w_2, w_3$

$J_0 = 0$ : $\operatorname{rg} = 0 \to \forall B, B'$, $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: $\operatorname{rg} = 1 \to v_2, v_3 \in \operatorname{Ker} f$ $(\to v_1)$ $w_1 = f(v_1)$ $(\to w_2, w_3)$, $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$\operatorname{rg} = 2 \to v_3 \in \operatorname{Ker} f$ $(\to v_1, v_2)$ $w_1 = f(v_1)$ $w_2 = f(v_2)$ $(\to w_3)$, $J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\operatorname{rg} = 3$ $B = B_{can}$ $B' = f(B_{can})$,

$[f]_{B,B'} = ([f(v_1)]_{B'}, [f(v_2)]_{B'}, [f(v_3)]_{B'})$, $\chi_f(x) = \det(A - x I_3)$ racines: val. prp., vect. prp.: $\operatorname{Ker}(A - w I_3)$,

multi. géo.: $d_w = \dim \operatorname{Ker}(A - w I_3)$, multi. algé.: $e_w$ puissance de $(x-w)$ $1 \leq d_w \leq e_w \leq 3$,

$e_w = 1 \Rightarrow d_w = 1$, $f$ diagonalisable $\Leftrightarrow \overset{\Rightarrow e_w = 3}{d_w = 3}$, $A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{v_p}$, $v_p \in$ droite/plan stable, $v_1 \notin \operatorname{Im}(A - w I_3)$

réduction: $(w-x)^3$ et $d_w = 2 \to \begin{pmatrix} w & 0 & 0 \\ 0 & w & 1 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$, mais $d_w = 1 \to \begin{pmatrix} w & 1 & 0 \\ 0 & w & 1 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} \Rightarrow B = f^2(v_1), f(v_1), v_1$,

$(w-x)(\varepsilon - x)^2$ et $d_w = d_\varepsilon = 1 \to \begin{pmatrix} w & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{B = u}_{\operatorname{Ker}(A - w I_3)}$, $\underbrace{v', w'}_{\operatorname{Im}(A - w I_3)}$,

$(w-x)((x-\varepsilon)^2 + p^2)$ et $d_w = 1 \to \begin{pmatrix} w & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & -p \\ 0 & p & \varepsilon \end{pmatrix} \Rightarrow B = u$, $v$, $f(v) - pv$

**Espaces vectoriels:** muni de l'addition et mult. scal., $v + 0_V = v$, $v + w = w + v$, $1v = v$,

$\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$, SEV: $W$ $0_V \in W$ stable + et mult. scal., Famille génératrice: $\operatorname{Vect}(F) = W$, $\langle \operatorname{Rel}(F) \rangle$

relations: $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V$, $F$ libre $\Leftrightarrow \operatorname{Rel}(F) = 0$, base: Famille génératrice libre,

dimension: nb. d'él. dans la base, $\dim f = \operatorname{rg} f$, $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$,

$\dim \operatorname{Rel}(F) + \dim \operatorname{Vect}(F) = n$