1^{er} semestre

Analyse 1 - CMS - Résumé

Identitées : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Valeur absolue : $|F(x)|=g(x) \Leftrightarrow g(x)\geq 0$ et $\begin{cases} F(x)=g(x) \\ \text{ou} \\ F(x)=-g(x) \end{cases}$, $|F(x)|\leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} F(x)\leq g(x) \\ \text{et} \\ F(x)\geq -g(x) \end{cases}$,

$|F(x)|\geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} F(x)\geq g(x) \\ \text{ou} \\ F(x)\leq -g(x) \end{cases}$, $|x|=x\cdot \operatorname{sgn}(x)$, $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$, $|x+y|\leq|x|+|y|$

Puissances et racines : $\sqrt{F(x)}=g(x) \Leftrightarrow g(x)\geq 0$ et $F(x)=g^2(x)$, $\sqrt{F(x)}\leq g(x) \Leftrightarrow g(x)\geq 0$ et $F(x)\leq g^2(x)$,

$\sqrt{F(x)}\geq g(x) \Leftrightarrow (g(x)<0)$ ou $(g(x)\geq 0$ et $F(x)\geq g^2(x))$, $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a \text{ si } n \text{ impaire} \\ |a| \text{ si } n \text{ paire} \end{cases}$, $(\sqrt[n]{a})^n=a$, $a^{-\frac{n}{m}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$

Trinôme : $\begin{cases} a>0 \Rightarrow \cup \\ a<0 \Rightarrow \cap \end{cases}$, $\begin{cases} \Delta<0 \Rightarrow 0 \text{ sol.} \\ \Delta=0 \Rightarrow 1 \text{ sol.} \\ \Delta>0 \Rightarrow 2 \text{ sol.} \end{cases}$, $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, $\operatorname{sgn}(P)=\operatorname{sgn}(a)$ en dehors de $[x_1;x_2]$,

$\operatorname{sgn}(P)=-\operatorname{sgn}(a)$ dans $]x_1;x_2[$, $(m<x_1<n<x_2<q)$ $P(m)\cdot a>0$ $P(p)\cdot a>0$ $P(n)\cdot a<0$ $\Delta>0$ et $a\neq 0$, $\Delta=b^2-4ac$,

$(b=2b')$ $\Delta'=b'^2-a\cdot c \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$, $(\Delta>0)$ $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

Isopérimétrie : 1) cond. géom. $(a,b>0)$, 2) Equ. liaison, 3) LA variable et Ddef, 4) $A(x)=$ (aire), 5) variation de $A(x)$ (Ddef, zéros, sommet) $\rightarrow$ représentation graphique, 6) résoudre equ. liaison

Binôme de Newton : $(x+a)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\cdot a^k$

Suites : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ a_n est : majorée $\Leftrightarrow \exists M\in\mathbb{R}$ tq. $a_n\leq M$, minorée $\Leftrightarrow \exists N\in\mathbb{R}$ tq. $a_n\geq N$, croissante $\Leftrightarrow a_n\leq a_{n+1}$, décroissante $\Leftrightarrow a_n\geq a_{n+1}$, monotone $\Leftrightarrow$ croissante ou décroissante, bornée $\Leftrightarrow$ majorée et minorée, converge vers $a\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}^*$ $(N=N(\varepsilon))$ tq. $n\geq N \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$ alors $\lim_{n\to\infty}a_n=a$, soite convergente n'a qu'une seule limite

Limites (suites) **:** $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|$, $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$, $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b}$, (th. comparaison) : $\exists N_0\in\mathbb{N}^*$ tq. $a_n\leq b_n$ $\forall n\geq N_0 \Rightarrow a\leq b$, (th. 2 gendarmes) $\exists N_0\in\mathbb{N}^*$ tq. $g_n\leq a_n\leq d_n$ $\forall n\geq N_0$ et $\lim_{n\to\infty}g_n=\lim_{n\to\infty}d_n=L$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=L$, $(\lim_{n\to\infty}|a_n|=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0)$, "$\infty\times\infty$" $=\infty$, "$\frac{1}{0}$" $=\infty$, $\exists N_0\in\mathbb{N}$ tq. $a_n \gtrless b_n$ $\forall n\geq N_0$ et $\lim_{n\to\infty}b_n=\pm\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\pm\infty$,

conjugué

(indéterminations) : "$\infty-\infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$0\cdot\infty$", "$\frac{0}{0}$"

évidance + haute puissances

Séries géométriques : $(a_n: a\to a+a\cdot q\to a+a\cdot q+a\cdot q^2)$, $a_n=a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$, $a_n: \begin{cases} \text{Converge vers } a\cdot\left(\frac{1}{1-q}\right) \text{ si } |q|<1 \\ \text{diverge si } |q|>1 \end{cases}$,

a peut valoir 1, q : raison

$(a_{n+1}=a_n+a\cdot q^n)$, (Sommes remarquables) : $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\simeq 2{,}71$, $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

Limites (Fonction) **:** $\lim_{x\to+\infty/-\infty}F(x)=L \Rightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists M>0 / N<0$ $(M(\varepsilon)/N(\varepsilon))$ tq. $x>M / x<N \Rightarrow |F(x)-L|<\varepsilon$, (caractérisation par suites) : $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=L \Leftrightarrow$ pour toute suite $(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\pm\infty$ $\lim_{n\to\pm\infty}F(x_n)=L$, (th. 2 gendarmes) : $\exists M_0\in\mathbb{R}$ tq. $g(x)\leq F(x)\leq d(x)$ $\forall x>M_0$ et $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}d(x)=L \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}F(x)=L$, "$0\times$ borné" $=0$, "$\infty\times$ sgn. cte." $=\pm\infty$, "$\infty+$ borné" $=\infty$,

$+\infty+$ minorée $=+\infty$

$-\infty+$ majorée $=-\infty$

$\lim_{x\to x_0}F(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $(\delta=\delta(\varepsilon))$ tq. $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |F(x)-L|<\varepsilon$, $\lim_{x\to x_0}F(x)$ existe ssi $\lim_{x\to x_0^-}F(x)=\lim_{x\to x_0^+}F(x)$

Fonction réelle : $F(-x)=F(x)$ (F pair), $F(-x)=-F(x)$ (F impaire), T : $F(x+T)=F(x)$, F strictement monotone $\Rightarrow F$ injective

La période

IPE: $(x \to 0)$ $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\tan x \sim x$, $\sin x \sim x$

Continuité: f continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ ssi. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\left(x_0 \in D_f, \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L, L = f(x_0)\right)$,

(f et g continues en x_0): $|f|$ continue en x_0, $(f \pm g)$ continue en x_0, $f \circ g$ continue en x_0, $\frac{f}{g}$ continue en x_0, $C^0(I)$ ens. fonctions continues sur I,

$x_0 \notin D_f$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ L & \text{si } x = x_0 \end{cases}$, (exemples de $C^0(D_f)$): polynomiales, rationnelles, val. abs., log., sin, cos, ...,

f continue en x_0 et g continue en $f(x_0) \Rightarrow g \circ f$ continue en x_0, f continue sur $[a;b]$ et $c \in [f(a); f(b)] \Rightarrow \exists x_0 \in [a;b]$ tq. $f(x_0) = c$, f continue et strictement croissante/décroissante sur $[a;b] \Rightarrow f$ bijective de $[a;b]$ sur $[f(a); f(b)]$/$[f(b); f(a)]$

Dérivée: f dérivable en x_0 ssi. $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existe, $t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ et $P(x_0; f(x_0)) \in t$, $m = f'(x_0)$, f dérivable $\Rightarrow f$ continue, $m_t \cdot m_n = -1$ $(t \perp n)$, dérivable à gauche $f'(x_0^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \cdots$ à droite $f'(x_0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \cdots$,

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$, $[\lambda f(x)]' = \lambda f'(x)$, $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$,

$f'(c) = 0$, $f'(x) = 1$, $f'(x^n) = n \cdot x^{n-1}$, $\left[\frac{1}{u(x)}\right]' = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$, $\left[\sqrt{u(x)}\right]' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$ (avec $f^{(0)} = f$),

$C^n(I)$: ens. fct. n fois continuement dérivable sur I $(\cos x \in C^\infty(\mathbb{R}))$, $[g \circ f]'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Approximation linéaire: $dy = f'(x_0) \cdot dx$, $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x_0}$, $f(x_0 + \Delta x) = A = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0)$, (fonction paramétrique):

$\Gamma: \begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$, $m = \frac{dy}{dx}\Big|_P = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$, $t: y - y(t_0) = m(x - x(t_0))$

Théorèmes: (val. inter.) f continue sur $[a;b] \Rightarrow$ "$f([a;b])$" est un intervalle fermé, (Rolle): f continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ et $f(a) = f(b)$ $(=0) \Rightarrow \exists x_0 \in]a;b[$ tq. $f'(x_0) = 0$,

(TAF, accroissements finis) f continue sur $[a;b]$ et f dérivable sur $]a;b[\Rightarrow \exists x_0 \in]a;b[$ tq. $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (droite $(a; f(a)), (b; f(b))$)

Analyse 1 - CMS - Résumé

Bernoulli L'Hospital: $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$, $\lim_{x \to x_0/\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0/\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Étude fonction / arc paramétré: expliciter $x(t), y(t)$, domaine de définition (BORNES), continuité (BORNES), réécriture fonction par parties ($|x|$), périodicité (PPMC(T_x, T_y)), parité : ($f(-x)=f(x) \Rightarrow$ symét. Oy, $f(-x)=-f(x) \Rightarrow$ symét. O) ($x(t)$ paire $y(t)$ impaire $\Rightarrow$ symét. Ox, $x(t)$ impaire $y(t)$ paire $\Rightarrow$ symét. Oy, $x(t)$ impaire $y(t)$ impaire $\Rightarrow$ symétrie O), dérivée sur l'ouvert et domaine déf. des dérivées (BORNES) (pente tange. $\lim_{t \to t_0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$), zéros dérivées (tange. horiz., change de sgn. $\rightarrow$ extremum, tableau sgn. dérivée) (zéros communs : point stationnaire $\Rightarrow$ pente, $\dot{x}(t_0)=0$ $\dot{y}(t_0) \neq 0 \rightarrow$ tange. vert., $\dot{x}(t_0) \neq 0$ $\dot{y}(t_0)=0 \rightarrow$ tange. horiz.), (bornes dérivée limite : $L = \pm\infty$ $\rightarrow$ tangente verticale / $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$: $\pm\infty$ rebroussement (demi tange. vert.) et extremum, $\neq \infty$ point anguleux $\rightarrow$ dérivée change de sgn. extremum (produit des dérivées <0)), branches infinies (bornes D_f / C_f) ($\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ assym. vert. $x = x_0$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$ assym. horiz. $y = y_0$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$: $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \rightarrow$ pente $m=a \Rightarrow \lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b$: $b \in \mathbb{R}$ assym. oblique $y = ax+b$ $b = \pm\infty$ branche parabolique $m=a$, $m = \pm\infty$ branche parabolique vertic.) ($\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0$ et $\lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty \rightarrow$ assym. vert. $x = x_0$, $\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \to t_0} y(t) = y_0 \rightarrow$ assym. horiz. $y = y_0$, $\lim_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty \rightarrow \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \Rightarrow$ pente $m=a \Rightarrow \lim_{t \to t_0} [y(t) - a \cdot x(t)] = b$: $b \in \mathbb{R}$ assym. oblique $y = ax+b$ $b = \pm\infty$ branche parabolique $m=a$, $m = \pm\infty$ branche parabolique vert. en t_0), tableau variation : $\dot{x}(t), x(t)$ $\dot{y}(t), y(t)$ points spéciaux $M(t_k)$

Intégral: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$, $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$, $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$, f paire $[-a;a]$ $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, f impaire $[-a;a] \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$, $F'(x) = f(x)$, $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, $\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c$, $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$, $\int e^x\,dx = e^x + c$, $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$, $\int \cos x\,dx = \sin x + c$, $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$, $\int \tan^2(x)\,dx = \tan x - x + c$, $\int f[u(x)] \cdot u'(x)\,dx = F[u(x)] + c$, $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + c$, $\int \frac{u'(x)}{u^2(x)+1}\,dx = \arctan(u(x)) + c$, $\int \frac{u'(x)}{u^2(x)}\,dx = -\frac{1}{u(x)} + c$, $\int f(x) \cdot g(x)\,dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\,dx$, $x = \varphi(t)$ $t = \varphi^{-1}(x) \Rightarrow \int f(x)\,dx = \int f[\overbrace{\varphi(t)}^{x}] \cdot \overbrace{\varphi'(t)\,dt}^{dx}$, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$: $\sqrt{1-x^2}$ $x = \sin t$ ou $x = \cos t$, $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$: $\sqrt{x^2+1}$ $x = \sinh t$ $\sqrt{x^2-1}$ $x = \cosh t$, (reformer un carré sous la racine $\rightarrow$ sortir facteur λ),

$F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$: $\deg P < \deg Q$ ou $F(x)=P_1(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$ $Q(x)$ en facteur irréductibles (deg. 1 ou deg. 2

$\Delta<0)$ $F(x)=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+2ax+b}$ $\Rightarrow$ identification ou évaluation, $\int\frac{a}{x-\alpha}\,dx = a\ln|x-\alpha|+c$,

$\int\frac{a}{(x-\alpha)^n}\,dx=-\frac{1}{n-1}\frac{a}{(x-\alpha)^{n-1}}+c\ (n\geq 2)$, $\int\frac{px+q}{x^2+2ax+b}\,dx=\frac{p}{2}\ln(x^2+2ax+b)+\frac{q-ap}{\sqrt{b-a^2}}\arctan\left(\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}\right)+c$,

$F(x)=\frac{P(\sin x,\cos x)}{Q(\sin x,\cos x)}$: invariance $F(x)\,dx$ avec $-x$ $\rightarrow$ $\cos x = z$, $dx=-\frac{1}{\sin x}dz$ / $(\pi-x)$

$\rightarrow$ $\sin x = z$, $dx=\frac{1}{\cos x}dz$ / $(\pi+x)$ $\rightarrow$ $\tan x = z$, $dx=\cos^2 x\,dz$ / $\tan\frac{x}{2}=z$, $dx=\frac{2}{z^2+1}dz$

$\left(\sin x=\frac{2z}{1+z^2},\ \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)$, $A=\int_a^c|f(x)|\,dx$ (param.) $A=\int_{x_1}^{x_2}|y|\,dx$ $A=\int_{t_1}^{t_2}|y(t)|\cdot\dot{x}(t)\,dt$, entre

deux courbes : $A=\int_{x_1}^{x_2}|y_1(x)-y_2(x)|\,dx$ (pts. d'intersection : $y_1(x)-y_2(x)\geq 0$), par rapport

à y : $\begin{cases} y=y_1(x) \Leftrightarrow x=x_1(y) \\ y=y_2(x) \Leftrightarrow x=x_2(y)\end{cases}$ $\Rightarrow A=\int_{y_1}^{y_2}|x_1(y)-x_2(y)|\,dy$, volume révolution : $A(x_0)=\pi f^2(x_0)$

$V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$, longueur d'arc : $S(x)=\int_a^x\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt$ (param.) $S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$,

surface révolution : $A=\int_a^b 2\pi f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ (param.) $A=\int_{t_1}^{t_2}2\pi y(t)\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt$